$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)"] \arrow[dr, "\cong", "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{C}}"] \\
& V \arrow[r, "F"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)"'] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}'}", "\cong"'] & & & K^m \arrow[ul, "\cong", "\Phi_{\mathcal{C}'}"']
\end{tikzcd}
$$

Wie erkennen wir, ob zwei Matrizen dieselbe lineare Abbildung darstellen (bezüglich verschiedener Basen)?

Spezialfall: Endomorphismen

$$M_{\mathcal{B}}(F) := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \qquad (3.4.4)$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}}(F)"] \arrow[dr, "\cong", "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & & & K^n \arrow[dl, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\
& V \arrow[r, "F"] & V & \\
K^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}'}(F)"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}'}", "\cong"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{B}'}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

dieselbe Basis

Def: (3.6.7) $M, M' \in M(m \times n; K)$ sind <u>äquivalent</u>, wenn es invertierbare

$$S \in M(m \times m; K)$$
$$T \in M(n \times n; K)$$

mit

$$M' = S^{-1} \cdot M \cdot T$$

gibt.

Quadr. $M, M' \in M(n \times n; K)$ sind <u>ähnlich</u>, wenn es invertierbare

$$T \in M(n \times n; K)$$

mit

$$M' = T^{-1} \cdot M \cdot T$$

gibt.

Notiz: (3.6.7) M, M' sind genau dann äquivalent, wenn sie bezüglich verschiedener Basen dieselbe Abb. darstellen:

$\exists F: K^n \longrightarrow K^m$,

Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ von K^n

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ von K^m

mit $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$

und $M' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)$

M, M' sind genau dann ähnlich wenn sie bezüglicher verschieden Basen denselben Endomorphismus darstellen.

$\exists\ F : K^n \longrightarrow K^n$

Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von K^n

mit $M = M_{\mathcal{B}}(F)$

$M' = M_{\mathcal{B}'}(F)$.

Äquivalenz

Ende Vorlesung 17:

$$\operatorname{Rang}(S^{-1} \cdot M \cdot T) = \operatorname{Rang}(M)$$

invertierbar

$\to$ Äquivalente Matrizen haben denselben Rang.

Satz („Lemma" in 3.6.7):

(1) Zwei $m \times n$-Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie denselben Rang haben.

(2) Jede Matrix ist äquivalent zu einer Matrix in Normalform

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \text{Null} & & 1 \end{matrix} & \text{Null} \\ \hline \text{Null} & \text{Null} \end{array}\right)$$

Ähnlichkeit

viel ~~schwieriger~~ interessanter

? Existieren andere Invarianten außer Rang die weiterhelfen ?

$\mathrm{Rang}(M) \in \mathbb{N}$

$\mathrm{Spur}(M) \in K$

$\det(M) \in K$

$\chi_M \in K[t]$ "charakteristisches Polynom"

Eigenwerte, Dimension von Eigenräumen...

stimmen für ähnliche Matrizen überein

Def: <u>Spur</u> von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$
(5.2.2)

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

"trace"

Def: <u>Determinante</u>
von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$:

$$\boxed{\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}}$$

(Leibnizformel, 4.2.5)

Vorlesung 6:

Def.: Die <u>symmetrische Gruppe</u> $(\mathfrak{S}(X), \circ)$ einer Menge X ist die Menge

$$\mathfrak{S}(X) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ bijektiv}\}$$

zusammen mit der Komposition $\circ$.

$$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1, \ldots, n\})$$

Elemente von $\mathfrak{S}_n$ sind also bijektive Abbildungen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, \ldots, n\}$, kurz: <u>$n$-stellige Permutationen</u>

Notation: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Def.: <u>Fehlstand</u> von $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: $\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$

Signum von $\sigma \in S_n$:

$$\mathrm{sign}(\sigma) := (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma} \in \{\pm 1\}$$

Satz: $\mathrm{sign}: S_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau)$$